Semana 17

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 10 a 18 de la Guía 5. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Matrices definidas y semidefinidas positivas

Antes de empezar con los ejercicios de esta semana, recordemos la definición de matrices definidas (semidefinidas) positivas, negativas e indefinidas:

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermítica, es decir $A^* = A$, decimos que:

- A es *definida positiva* si $\langle Ax, x \rangle > 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.
- A es *semidefinida positiva* si $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$.
- A es *definida negativa* si $\langle Ax, x \rangle < 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.
- A es *semidefinida negativa* si $\langle Ax, x \rangle \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$.
- A es *indefinida* si no es ninguna de las anteriores.

Observar que para que tenga sentido la definición anterior es necesario que A sea hermítica, es decir $A^* = A$. En ese caso, recordemos que $\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^*x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$ y entonces $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Proposición 1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermítica, es decir $A^* = A$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sus autovalores. Entonces:*

- *A es definida positiva si y sólo si $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.*
- *A es semidefinida positiva si y sólo si $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.*
- *A es definida negativa si y sólo si $\lambda_i < 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.*
- *A es semidefinida negativa si y sólo si $\lambda_i \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.*
- *A es indefinida si A tiene algún autovalor negativo y algún autovalor positivo.*

Dem. Supongamos que A es definida positiva, entonces $\langle Ax, x \rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Sea $\lambda_i \in \mathbb{R}$ un autovalor de A y $v_i \neq 0$ algún autovector asociado tal que $Av_i = \lambda_i v_i$, entonces:

$$0 < \langle Av_i, v_i \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle,$$

entonces como $\langle v_i, v_i \rangle > 0$, se sigue que $\lambda_i > 0$. Concluimos que si A es definida positiva todo autovalor de A es positivo (mayor estricto que 0).

Recíprocamente, supongamos que todos los autovalores de A son positivos. Es decir $\lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una bon de autovectores de $\mathbb{C}^n$ (existe pues A es hermítica) tal que $Av_i = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, entonces $x = a_1 v_2 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ con $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ no todos nulos. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x \rangle &= \langle A(a_1 v_2 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n), a_1 v_2 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \rangle \\
&= \langle a_1 A v_1 + a_2 A v_2 + \cdots + a_n A v_n, a_1 v_2 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \rangle \\
&= |a_1|^2 \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle + |a_2|^2 \lambda_2 \langle v_2, v_2 \rangle + \cdots + |a_n|^2 \lambda_n \langle v_n, v_n \rangle \\
&= |a_1|^2 \lambda_1 + |a_2|^2 \lambda_2 + \cdots + |a_n|^2 \lambda_n > 0,
\end{aligned}$$

y A resulta definida positiva.

De manera similar se prueban los demás ítems. $\square$

Descomposición en valores singulares

Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, una *descomposición en valores singulares (DVS)* de A es una factorización

$$A = U \Sigma V^*,$$

con $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitarias y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0_{r \times n-r} \\ 0_{m-r \times r} & 0_{m-r \times n-r} \end{bmatrix}$ donde $D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, los *valores singulares* no nulos de A.

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ entonces $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son ortogonales y $A = U \Sigma V^T$.

El próximo teorema nos brinda un algoritmo para obtener una DVS de cualquier matriz.

Teorema 1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ entonces existe una DVS de A.*

Dem. Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ entonces la matriz $A^* A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es hermítica y semidefinida positiva. De hecho,

$$(A^* A)^* = A^* (A^*)^* = A^* A.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\langle A^* A x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{C}^n.$$

Entonces A es semidefinida positiva y, por la Proposición 1, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A entonces $\lambda \geq 0$. Definimos

$$\sigma_i := \lambda_i^{1/2}$$

el $i-$ésimo *valor singular* de A.

Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ los n autovalores de A^*A (contados con multiplicidad) y $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una bon de $\mathbb{C}^n$ tal que $A^*Av_i = \lambda_i v_i$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ (existe pues A^*A es hermítica y por ende diagonalizable unitariamente). Entonces, definimos V y Σ de la siguiente manera:

$$V := [v_1 \ v_2 \cdots \ v_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

que es unitaria (pues sus columnas son una bon de $\mathbb{C}^n$),

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0_{r\times n-r} \\ 0_{m-r\times r} & 0_{m-r\times n-r} \end{bmatrix} \text{ donde } D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times r},$$

con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, los *valores singulares* no nulos de A.

Para definir U, consideremos los vectores

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1}, \ u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2}, \ \cdots, u_r = \frac{Av_r}{\sigma_r}.$$

Observar que,

$$\langle\, Av_i, Av_j \,\rangle = \langle\, v_i, A^*Av_j \,\rangle = \langle\, v_i, \lambda_j v_j \,\rangle = \lambda_j \langle\, v_i, v_j \,\rangle = \begin{cases} \lambda_j \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} .$$

Entonces,

$$\langle\, u_i, u_j \,\rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle\, v_i, A^*Av_j \,\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_j \sigma_j}\lambda_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_j^2} = 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} .$$

Por lo tanto, $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ es un conjunto ortonormal de $\mathbb{C}^m$. Si $r < m$, buscamos vectores $u_{r+1}, \cdots, u_m$, tales que $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ sea una bon de $\mathbb{C}^m$. Definimos U como

$$U := [u_1 \ u_2 \ \cdots u_m] \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

que es una matriz unitaria (pues sus columnas forman una bon de $\mathbb{C}^m$).

Además, observar que $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ es una bon de $col(A)$. Para ver eso, como ya vimos que $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ es un conjunto ortonormal, sólo nos basta ver que

$$gen\{u_1, u_2, \cdots, u_r\} = gen\{Av_1, Av_2, \cdots, Av_r\} = col(A).$$

Para eso, consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $T(x) = Ax$. Entonces, $Im(T) = col(A)$ y como $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base (de autovectores) de $\mathbb{C}^n$, tenemos que

$$Im(T) = gen\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\} = gen\{Av_1, \cdots, Av_n\}.$$

Por otra parte, si $i \geq r+1$, entonces $\lambda_i = 0$ y tenemos que

$$\|Av_i\|^2 = \langle\, Av_i, Av_i \,\rangle = \langle\, v_i, A^* Av_i \,\rangle = \lambda_i \langle\, v_i, v_i \,\rangle = 0,$$

entonces $Av_i = 0$ y tenemos que

$$col(A) = Im(T) = gen\{Av_1, \cdots, Av_n\} = gen\{Av_1, \cdots, Av_r\}$$

y probamos lo que queríamos.

Finalmente, veamos que $A = U\Sigma V^*$. Por un lado,

$$AV = [Av_1\ Av_2\ \cdots\ Av_r\ Av_{r+1} \cdots\ Av_n] = [\sigma_1 u_1\ \sigma_2 u_2\ \cdots\ \sigma_r u_r\ 0\ \cdots\ 0],$$

donde usamos que $Av_i = 0$, si $i \geq r+1$.

Por otro lado,

$$U\Sigma = [u_1\ u_2\ \cdots\ u_r\ \cdots\ u_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = [\sigma_1 u_1\ \cdots\ \sigma_r u_r\ 0 \cdots\ 0].$$

Por lo tanto, $AV = U\Sigma$. Como $V^{-1} = V^*$, concluimos que $A = U\Sigma V^*$. □

A partir del Teorema 1, podemos sacar algunas conclusiones extras:

- Si $A = U\Sigma V^*$ es una DVS de A. Entonces:

  $$\{u_2, u_2, \cdots, u_r\} = \{\frac{Av_1}{\sigma_1}, \frac{Av_2}{\sigma_2}, \cdots, \frac{Av_r}{\sigma_r}\}$$

  es una bon de $col(A)$. Por lo tanto,

  $r = rg(A) =$ número de valores singulares no nulos.

- Como $\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal tal que $Av_i = 0$ si $i = r+1, \cdots, n$ y, por el Teorema de la dimensión, $\dim(nul(A)) = n - rg(A) = n - r$, se sigue que

  $$\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$$

  es una bon de $nul(A)$.

Ejercicio 10: Hallar una DVS de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Dem. Para resolver este ejercicio, simplemente seguimos los pasos que hicimos en la demostración del Teorema 1:

1. Calcular los autovalores de A^TA y ordenarlos de mayor a menor.

   Observar que

$$A^TA = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

   Entonces, el polinomio caraceterístico de A^TA es

$$p_{A^TA}(\lambda) = -\lambda^3 + 34\lambda^2 - 225\lambda.$$

   Por lo tanto, los autovalores de A^TA (ordenados de mayor a menor) son: $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$.

2. Hallar una bon $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de A^TA tal que $A^TAv_i = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2, 3$.

   De hecho, como $nul(A^TA - 25I) = gen\{[1\ 1\ 0]^T\}$, $nul(A^TA - 9I) = gen\{[1\ \ -1\ 4]^T\}$ y $nul(A^TA) = gen\{[-2\ 2\ 1]^T\}$. Podemos tomar

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1\ 0]^T,\ v_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}[1\ \ -1\ 4]^T,\ v_3 = \frac{1}{3}[-2\ 2\ 1]^T.$$

3. Calcular los valores singulares de A.

$$\sigma_1 = \lambda_1^{1/2} = 25^{1/2} = 5,\ \sigma_2 = \lambda_2^{1/2} = 9^{1/2} = 3,\ \sigma_3 = \lambda_3^{1/2} = 0^{/12} = 0.$$

4. Determinar r el número de valores singulares no nulos de A (que es igual a $rg(A)$) y para $i = 1, \cdots, r$ definir

$$u_1 = \frac{Av_i}{\sigma_i}.$$

   De hecho, $r = 2$ (el número de valores singulares no nulos). Entonces, como $Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[5\ 5]^T$ y $Av_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}[9\ \ -9]^T$, tenemos que

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}[5\ 5]^T\frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T,\ \ u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}[9\ \ -9]^T\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ \ -1]^T.$$

5. Si $r < m$, hallar $u_{r+1}, \cdots, u_m$ tales que $\{u_1, \cdots, u_m\}$ es una bon de $\mathbb{R}^m$.

   Como en este caso $r = 2 = m$, este paso no es necesario.

6. Definir las matrices

$$V := [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\ U := [u_1\ u_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$\square$

DVS y los subespacios fundamentales de una matriz

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $rg(A) = r$ y $A = U\Sigma V^T$ es una DVS de A, donde

$$V = [v_1 \ \cdots \ v_r \ v_{r+1} \ \cdots \ v_n] \text{ y } U = [u_1 \ \cdots \ u_r \ u_{r+1} \ \cdots \ u_m].$$

Entonces, definimos las matrices:

$$V_r := [v_1 \ \cdots \ v_r], \quad V_{n-r} := [v_{r+1} \ \cdots \ v_n], \quad U_r := [u_1 \ \cdots \ u_r], \quad U_{m-r} := [u_{r+1} \ \cdots \ u_m].$$

Entonces:

1. $\{v_1, \cdots, v_r\}$ es una bon de $col(A^T) = fil(A)$ y $\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ es una bon de $nul(A)$. Además, si $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$V_r V_r^T = [P_{col(A^T)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}, \quad V_r^T V_r = I_r, \quad V_{n-r} V_{n-r}^T = [P_{nul(A)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}, \quad V_{n-r}^T V_{n-r} = I_{n-r}.$$

   De hecho, en el Teorema 1, vimos que $\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ es una bon de $nul(A)$. Por lo tanto, como $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una bon de $\mathbb{R}^n$, no queda otra que $\{v_1, \cdots, v_r\}$ sea una bon de $nul(A)^\perp = col(A^T) = fil(A)$.

   Además, si $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, recordando lo que vimos en la **Semana 12**, se deducen las fórmulas $V_r V_r^T = [P_{col(A^T)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$, $V_r^T V_r = I_r$, $V_{n-r} V_{n-r}^T = [P_{nul(A)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$, $V_{n-r}^T V_{n-r} = I_{n-r}$.

2. $\{u_1, \cdots, u_r\}$ es una bon de $col(A)$ y $\{u_{r+1}, \cdots, u_m\}$ es una bon de $col(A)^\perp = nul(A^T)$. Además, si $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$, tenemos que:

$$U_r U_r^T = [P_{col(A)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}, \quad U_r^T U_r = I_r, \quad U_{m-r} U_{m-r}^T = [P_{nul(A^T)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}, \quad U_{m-r}^T U_{m-r} = I_{m-r}.$$

   De hecho, en el Teorema 1, vimos que $\{u_1, \cdots, u_m\}$ es una bon de $col(A)$. Por lo tanto, como $\{u_1, \cdots, u_m\}$ es una bon de $\mathbb{R}^m$, no queda otra que $\{u_{r+1}, \cdots, u_m\}$ sea una bon de $col(A)^\perp = nul(A^T)$.

   Además, si $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$, recordando lo que vimos en la **Semana 12**, se deducen las fórmulas $U_r U_r^T = [P_{col(A)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$, $U_r^T U_r = I_r$, $U_{m-r} U_{m-r}^T = [P_{nul(A^T)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$, $U_{m-r}^T U_{m-r} = I_{m-r}$.

Finalmente, observar que $V = [V_r \ V_{n-r}]$ y $U = [U_r \ U_{m-r}]$. Entonces,

$$A = U\Sigma V^T = [U_r \ U_{m-r}] \begin{bmatrix} D & 0_{r\times n-r} \\ 0_{m-r\times r} & 0_{m-r\times n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{bmatrix} = U_r D V_r^T.$$

A la factorización $A = U_r D V_r^T$, la llamaremos *DVS reducida* de A.

Notar que como $D \in \mathbb{R}^{r \times r}$ es una matriz diagonal con elementos positivos en su diagonal (los valores singulares no nulos de A), entonces D es inversible.

Ejercicio 11: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

a) Hallar los valores singulares de A, bon de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

b) Hallar una DVS reducida de A.

Dem. a): La factorización que tenemos de A es "casi" una DVS de A. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tiene columnas ortogonales pero no ortonormales y lo mismo sucede con $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Procedemos a normalizar las columnas de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dividiendo cada una de ellas por su norma que es $\sqrt{2}$. Para que el producto siga siendo A, es necesario multiplicar también por $\sqrt{2}$. Es decir,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sqrt{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, como la norma de las 3 columnas de la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ es $3\sqrt{2}$ para normalizarlas, procedemos a multiplicar y dividir por $3\sqrt{2}$. Entonces, nos queda

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sqrt{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} 3\sqrt{2} \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\,3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}\,3\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que ahora sí es una DVS de A, ya que $A = U\Sigma V^T$, con

$$U := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Entonces, $\sigma_1 = 18, \sigma_2 = 12$ y $r = 2 = rg(A)$, el número de valores singulares no nulos.

Una bon de $col(A) = \mathbb{R}^2$, puede ser $\{[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T, [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}]^T\}$. Por otra parte, $col(A)^\perp = nul(A^T) = \{0\}$. Entonces,

$$U_2 U_2^T = I_2 = [P_{col(A)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}.$$

Finalmente, tenemos que $\{[\frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ 0]^T, [\frac{1}{3\sqrt{2}} \ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \ \frac{4}{3\sqrt{2}}]^T\}$ es una bon de $col(A^T) = fil(A) = nul(A)^\perp$ y $\{[\frac{2}{3} \ -\frac{2}{3} \ -\frac{1}{3}]^T\}$ es una bon de $nul(A)$. Entonces,

$$V_2 V_2^T = [P_{col(A^T)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}.$$

$$V_1 V_1^T = [P_{nul(A)}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} [\frac{2}{3} \ -\frac{2}{3} \ -\frac{1}{3}] = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$b)$: Una DVS reducida de A puede ser

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

□

Solución por mínimos cuadrados de norma mínima. Pseudo-inversa de Moore-Penrose

Recordemos que en la **Guía 3** vimos que, si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, la ecuación $Ax = b$ siempre admite solución por mínimos cuadrados y dicha solución es única si y sólo si $nul(A) = \{0\}$, ó, equivalentemente $rg(A) = n$. Cuando existan infinitas soluciones por mínimos cuadrados, nos interesa disponer de un criterio para seleccionar una de ellas.

Diremos que $\tilde{x}$ es una *solución por mínimos cuadrados de norma mínima* de la ecuación $Ax = b$, si $\tilde{x}$ es solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$ y

$$\|\tilde{x}\| \leq \|\hat{x}\|$$

para toda $\hat{x}$ solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$.

Sea $\hat{x}$ una solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$. Entonces, por un lado, recordemos que $\hat{x}$ cumple que

$$A\hat{x} = P_{col(A)}b.$$

Por el otro lado, tenemos que

$$\hat{x} = P_{nul(A)}\hat{x} + P_{nul(A)^\perp}\hat{x}.$$

Sea $\tilde{x} := P_{nul(A)^\perp}\hat{x} \in nul(A)^\perp$. Entonces,

$$P_{col(A)}b = A\hat{x} = A(P_{nul(A)}\hat{x} + P_{nul(A)^\perp}\hat{x}) = AP_{nul(A)}\hat{x} + AP_{nul(A)^\perp}\hat{x} = A\tilde{x}.$$

Entonces $\tilde{x}$ es una solución por mínimos cuadrados que pertenece a $nul(A)^\perp$.

Supongamos que x' es otra solución por mínimos cuadrados que pertenece a $nul(A)^\perp$. Entonces, como $\tilde{x}$ y x' son soluciones por mínimos cuadrados, tenemos que

$$Ax' = P_{col(A)}b = A\tilde{x}.$$

Entonces $x' - \tilde{x} \in nul(A)$. Además, como $\tilde{x}$ y x' pertenecen al subespacio $nul(A)^\perp$, se sigue que $x' - \tilde{x} \in nul(A)^\perp$. Por lo tanto, $x' - \tilde{x} \in nul(A) \cap nul(A)^\perp = \{0\}$. Entonces $\tilde{x} = x'$. Concluimos que:

> Existe una única solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$ que pertenece a $nul(A)^\perp$.

Ahora veamos que $\tilde{x}$ es una solución por mínimos cuadrados de norma mínima. De hecho, sea $\hat{x}$ una solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$. Entonces, vimos que $\hat{x} - \tilde{x} \in nul(A)$. Entonces, como $\hat{x} = \hat{x} - \tilde{x} + \tilde{x}$, con $\hat{x} - \tilde{x} \in nul(A)$ y $\tilde{x} \in nul(A)^\perp$, por el Teorema de Pitágoras (o haciendo la cuenta), tenemos que

$$\|\hat{x}\|^2 = \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x}\|^2 \geq \|\tilde{x}\|^2.$$

Tomando raíz (que es una función creciente), tenemos que

$$\|\hat{x}\| \geq \|\tilde{x}\|$$

para toda $\hat{x}$ solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$. Por lo tanto,

> $\tilde{x}$ es una solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

Además, $\tilde{x}$ es la única solución por mínimos cuadrados de norma mínima. De hecho, si z también es una solución por mínimos cuadrados de norma mínima, entonces $\|z\| = \|\tilde{x}\|$. Además, como z y $\tilde{x}$ son solución por mínimos cuadrados, tenemos que $z - \tilde{x} \in nul(A)$ y tenemos que $\tilde{x} \in nul(A)^\perp$. Por lo tanto, aplicando Pitágoras nuevamente, se sigue que

$$\|z\|^2 = \|z - \tilde{x} + \tilde{x}\|^2 = \|z - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x}\|^2.$$

Entonces

$$\|z - \tilde{x}\|^2 = \|z\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 = 0.$$

Por lo tanto $z = \tilde{x}$. Entonces,

$\tilde{x}$ es la única solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

Veamos una manera de encontrar $\tilde{x}$. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $rg(A) = r$ y $A = U_r D V_r$ es una DVS reducida de A. Recordemos que $D \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es inversible, $U_r U_r^T = P_{col(A)}, V_r^T V_r = I_r$ y $col(V_r) = nul(A)^\perp$. Entonces, afirmamos que

$$\tilde{x} = (V_r D^{-1} U_r^T) b.$$

De hecho, $(V_r D^{-1} U_r^T) b \in col(V_r) = nul(A)^\perp$ y además

$$\begin{aligned} A(V_r D^{-1} U_r^T) b &= U_r D V_r^T (V_r D^{-1} U_r^T) b = U_r D (V_r^T V_r) D^{-1} U_r^T b = U_r D I_r D^{-1} U_r^T b = U_r I_r U_r^T b \\ &= U_r U_r^T b = P_{col(A)} b. \end{aligned}$$

Entonces, $(V_r D^{-1} U_r^T) b$ es una solución por mínimos cuadrados que pertenece a $nul(A)^\perp$. Acabamos de ver $\tilde{x}$ es la única solución por mínimos cuadrados que pertence a $nul(A)^\perp$. Por lo tanto, tenemos que $\tilde{x} = (V_r D^{-1} U_r^T) b$ como queríamos ver.

La matriz $A^\dagger := U_r D V_r^T$ es la *matriz pseudo inversa de Moore-Penrose* de A. Por lo tanto

$$\tilde{x} = A^\dagger b$$

es la única solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

Ejercicio 13 b): Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Hallar $A^\dagger$ y determinar la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

Dem. En el **Ejercicio 10**, probamos que $A = U\Sigma V^T$ con

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \; \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $rg(A) = 2$ y

$$V_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \; U_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

y tenemos que $A = U_2 D V_2^T$ es una DVS reducida de A.

Aplicando la fórmula de la definición de la pseudo inversa Moore-Penrose de A tenemos que

$$A^\dagger = V_2 D^{-1} U_2^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{45} & \frac{2}{45} \\ \frac{2}{45} & \frac{7}{45} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

Entonces, la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = b$ es

$$\tilde{x} = A^{\dagger} b = \begin{bmatrix} \frac{7}{45} & \frac{2}{45} \\ \frac{2}{45} & \frac{7}{45} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7b_1+2b_2}{45} \\ \frac{2b_1+7b_2}{45} \\ \frac{2b_1-2b_2}{9} \end{bmatrix}.$$

$\square$

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que

$$A = U\Sigma V^*$$

es una DVS de A, donde $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son unitarias y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es tal que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0_{r\times n-r} \\ 0_{m-r\times r} & 0_{m-r\times n-r} \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times r},$$

con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, los valores singulares no nulos de A (ordenados de mayor a menor) entonces, se sigue que:

$$\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_1 \text{ y } \min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_n.$$

De hecho, sea $x \in \mathbb{C}^m$ tal que $\|x\| = 1$. Entonces,

$$\|Ax\|^2 = \|U\Sigma V^* x\|^2.$$

Como U es unitaria, tenemos que

$$\|U\Sigma V^* x\|^2 = \|\Sigma V^* x\|^2.$$

Sea $y := V^* x$, entonces como V^* es unitaria, tenemos que $\|y\| = \|V^* x\| = \|x\|$ y entonces,

$$\|Ax\|^2 = \|\Sigma V^* x\|^2 = \|\Sigma y\|^2 = \sigma_1^2 |y_1|^2 + \cdots + \sigma_n^2 |y_n|^2.$$

Veamos que

$$\max_{\|y\|=1} \left(\sigma_1^2 |y_1|^2 + \cdots + \sigma_n^2 |y_n|^2\right) = \sigma_1^2.$$

De hecho, si $y \in \mathbb{C}^n$ es tal que $\|y\|^2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_1^2 \|y\|^2 = \sigma_1^2 (|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2) = \sigma_1^2 |y_1|^2 + \sigma_1^2 |y_2|^2 + \cdots + \sigma_1^2 |y_n|^2 \\ &\geq \sigma_1^2 |y_1|^2 + \sigma_2^2 |y_2|^2 + \cdots + \sigma_n^2 |y_n|^2, \end{aligned}$$

donde usamos que los valores singulares de A están ordenados de mayor a menor, entonces

$$\sigma_1^2 |y_i|^2 \geq \sigma_i^2 |y_i|^2,$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$. Por lo tanto, σ_1^2 es una cota superior del conjunto en cuestión, es decir

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_1^2|y_1|^2 + \sigma_2^2|y_2|^2 + \cdots + \sigma_n^2|y_n|^2,$$

para todo $y \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|y\|^2 = 1$.

Además el vector $y := [1\ 0\ \cdots\ 0]^T \in \mathbb{C}^n$, cumple $\|y\| = 1$ y

$$\sigma_1^2|y_1|^2 + \sigma_2^2|y_2|^2 + \cdots + \sigma_n^2|y_n|^2 = \sigma_1^2.$$

Entonces, encontramos un elemento del conjunto en cuestión que alcanza la cota superior. Por lo tanto σ_1^2 es el máximo, es decir

$$\max_{\|y\|=1} (\sigma_1^2|y_1|^2 + \cdots + \sigma_n^2|y_n|^2) = \sigma_1^2.$$

Como

$$\max_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \max_{\|y\|=1} \|\Sigma y\|^2 = \max_{\|y\|=1} (\sigma_1^2|y_1|^2 + \cdots + \sigma_n^2|y_n|^2) = \sigma_1^2.$$

Tomando raíz (que es una función creciente), se sigue que:

$$\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_1$$

y el máximo se alcanza en los vectores $x \in \mathcal{S}_{\lambda_1=\sigma_1^2}$ (el autoespacio asociado al mayor autovalor $\lambda_1 = \sigma_1^2$ de A^*A) tal que $\|x\| = 1$.

Veamos esto último. Supongamos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_t\}$ es una bon de $\mathcal{S}_{\lambda_1=\sigma_1^2}$, donde $v_1, \cdots, v_t$ son tales que $A^*Av_i = \sigma_1^2 v_i$ para $i = 1, 2 \cdots, t$. Entonces, recordando cómo construimos la DVS de A, se sigue que $v_1, \cdots, v_t$ son las primeras t columnas de la matriz V y tenemos que

$$V^*v_i = e_i,$$

para $i = 1, \cdots, t$, donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Sea $x \in \mathcal{S}_{\lambda_1=\sigma_1^2} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_t\}$, entonces $x = a_1v_1 + \cdots + a_tv_t$, para ciertos $a_1, \cdots, a_t \in \mathbb{C}$. Entonces, por un lado, como $\|x\| = 1$, tenemos que

$$1 = \|x\| = \|a_1v_1 + \cdots + a_tv_t\| = (|a_1|^2 + \cdots + |a_t|^2)^{1/2}$$

y, por el otro lado,

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \|U\Sigma V^*x\| = \|\Sigma V^*(a_1v_1 + \cdots + a_tv_t)\| = \|\Sigma(a_1V^*v_1 + a_2V^*v_2 + \cdots + a_tV^*v_t)\| \\ &= \|\Sigma(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots a_te_t)\| = \|\sigma_1a_1e_1 + \sigma_1a_2e_2 + \cdots + \sigma_1a_te_t\| \\ &= \sigma_1\|a_1e_1 + \cdots a_te_t\| = \sigma_1(|a_1|^2 + \cdots + |a_t|^2)^{1/2} = \sigma_1.\end{aligned}$$

Entonces, $\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_1$ para todo $x \in \mathcal{S}_{\lambda_1=\sigma_1^2}$ (el autoespacio asociado al mayor autovalor $\lambda_1 = \sigma_1^2$ de A^*A) tal que $\|x\| = 1$.

De manera similar, se prueba que:

$$\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_n$$

y el mínimo se alcanza en los vectores $x \in \mathcal{S}_{\lambda_n=\sigma_n^2}$ (el autoespacio asociado al menor autovalor $\lambda_n = \sigma_n^2$ de A^*A) tal que $\|x\| = 1$.

Ejercicio 14: Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ de norma 1 aquellos que maximizan y minimizan $\|T(x)\|$ y calcular dicho máximo y mínimo.

Dem. Tal como vimos arriba, para resolver el ejercicio, primero hallemos una DVS de A. Busquemos los autovalores y autovectores de

$$A^T A = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

De hecho, $p_{A^TA}(\lambda) = (11-\lambda)^2 - 1$. Entonces $\lambda_1 = 12$ y $\lambda_2 = 10$ son los autovalores de A ordenados de mayor a menor y $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T$ y $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ 1]^T$ los autovectores asociados correspondientes. Entonces, $\sigma_1 = \lambda_1^{1/2} = 2\sqrt{3}$, $\sigma_2 = \lambda_2^{1/2} = \sqrt{10}$ y $V = [v_1\ v_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, tal como vimos arriba,

$$\max_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_1 = 2\sqrt{3}$$

y el máximo se alcanza en $x \in \mathcal{S}_{\lambda_1=\sigma_1^2} = \mathcal{S}_{\lambda_1=12} = gen\{v_1\} = gen\{\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T\}$ tal que $\|x\| = 1$. Entonces, el vector x realiza el máximo si $x = \alpha\ \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$1 = \|x\| = \|\alpha\ \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T\| = |\alpha|\|\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T\| = |\alpha|.$$

Entonces $\alpha = \pm 1$ y

$$x_{\text{máx}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T.$$

De manera similar, tenemos que

$$\min_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_2 = \sqrt{10}$$

y el mínimo se alcanza en $x \in \mathcal{S}_{\lambda_2=\sigma_2^2} = \mathcal{S}_{\lambda_2=10} = gen\{v_2\} = gen\{\frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ 1]^T\}$ tal que $\|x\| = 1$. Entonces, el vector x realiza el mínimo si $x = \alpha\ \frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ 1]^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$1 = \|x\| = \|\alpha\ \frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ 1]^T\| = |\alpha|\|\frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ 1]^T\| = |\alpha|.$$

Entonces $\alpha = \pm 1$ y

$$x_{\text{mín}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ 1]^T.$$

$\square$

Imagen por una transformación lineal de la circunferencia unitaria

Los siguientes ejercicios tienen como objetivo interpretar geométricamente la DVS de una matriz estudiando la imagen por una transformación lineal de la cirunferencia unitaria

$$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Ejercicio 16a): Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$. Hallar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. Donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dem. Recordar que

$$T(S_1) = \{T(x) : x \in S_1\} = \{T(x) : \|x\| = 1\}.$$

Entonces,

$$z \in T(S_1) \text{ si y sólo si } z = T(x) = Ax$$

para cierto $x \in \mathbb{R}^2$ con $\|x\| = 1$.

Supongamos que $A = U\Sigma V^T$ es una DVS de A y consideremos el cambio de variable $x = Vy$. Entonces, como V es ortogonal, vale que $\|x\| = \|y\|$. Entonces,

$$z \in T(S_1) \text{ si y sólo si } z = T(x) = Ax = AVy = U\Sigma V^T Vy = U\Sigma y$$

con $\|y\| = 1$. Entonces, como $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$z \in T(S_1) \text{ si y sólo si } z = U\Sigma y = \sigma_1 u_1 y_1 + \sigma_2 u_2 y_2$$

con $y = [y_1\ y_2]^T$ tal que $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$.

Si consideramos $\mathcal{B} := \{u_1, u_2\}$ que es una bon de $\mathbb{R}^2$. Tenemos que

$$[z]^{\mathcal{B}} = [w_1\ w_2]^T = [\sigma_1 y_1\ \sigma_2 y_2]^T,$$

con $y = [y_1\ y_2]^T$ tal que $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$.

Ahora calculemos los valores singulares de A y las columnas u_1, u_2 de U. Para eso, busquemos los autovalores y autovectores de

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

De hecho $p_{A^TA}(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 4$. Entonces, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$ son los autovalores de $A^T A$ ordenados de mayor a menor y $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ -1]^T$ son los autovectores asociados correspondientes. Por lo tanto, $\sigma_1 = \lambda_1^{1/2} = 2$, $\sigma_2 = 0$ y además, $u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{[2\ 2]^T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T$ y $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ 1]^T$

(cualquier vector para completar a una bon de $\mathbb{R}^2$). Entonces, como $[z]^{\mathcal{B}} = [w_1\ w_2]^T = [\sigma_1 y_1\ \sigma_2 y_2]^T$, tenemos que

$$y_1 = \frac{w_1}{\sigma_1} = \frac{w_1}{2},\ w_2 = 0.$$

Entonces,

$$z \in T(S_1) \text{ si y sólo si } \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} = y_1^2 \leq y_1^2 + y_2^2 = 1 \text{ y } w_2 = 0.$$

Entonces, $w_1^2 \leq \sigma_1^2$, por lo tanto $-2 = -\sigma_1 \leq w_1 \leq \sigma_1 = 2$ y $w_2 = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} T(S_1) &= \{z \in \mathbb{R}^2 : z = w_1 u_1 + w_2 u_2, -2 \leq w_1 \leq 2,\ w_2 = 0\} = \{z \in \mathbb{R}^2 : z = w_1 u_1, -2 \leq w_1 \leq 2\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^2 : z = \frac{w_1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, -2 \leq w_1 \leq 2\}. \end{aligned}$$

Entonces la imagen por T de la circunferencia unitaria de $\mathbb{R}^2$ es el segmento en $\mathbb{R}^2$ de extremos $\frac{-2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\square$

Ejercicio 17b): Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$. Hallar la imagen por T de la esfera unitaria $S_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

Dem. Recordar que

$$T(S_2) = \{T(x) : x \in S_2\} = \{T(x) : \|x\| = 1\}.$$

De la misma manera que hicimos en el **Ejercicio 16a)**, si $A = U\Sigma V^T$ es una DVS de A y consideramos el cambio de variable $x = Vy$. Entonces, como V es ortogonal, vale que $\|x\| = \|y\|$. Entonces,

$$z \in T(S_2) \text{ si y sólo si } z = U\Sigma V^T x = U\Sigma y = \sigma_1 u_1 y_1 + \sigma_2 u_2 y_2 + \sigma_3 u_3 y_3$$

con $y = [y_1\ y_2\ y_3]^T$ tal que $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. Sea $\mathcal{B} := \{u_1, u_2, u_3\}$ que es una bon de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$[z]^{\mathcal{B}} = [w_1\ w_2\ w_3]^T = [\sigma_1 y_1\ \sigma_2 y_2\ \sigma_3 y_3]^T,$$

con $y = [y_1\ y_2\ y_3]^T$ tal que $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$.

Calculemos los valores singulares de A y las columnas u_1, u_2, u_3 de la matriz U. Para eso, busquemos los autovalores y autovectores de

$$A^T A = \begin{bmatrix} 24 & 48 & -24 \\ 48 & 116 & -8 \\ -24 & -8 & 104 \end{bmatrix}.$$

De hecho $p_{A^TA}(\lambda) = -\lambda^3 + 244\lambda^2 - 14400\lambda$. Entonces, $\lambda_1 = 144$, $\lambda_2 = 100$, $\lambda_3 = 0$ son los autovalores de $A^T A$ ordenados de mayor a menor y $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}[-1\ \ -2\ 1]^T$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}[0\ 1\ 2]^T$ y $v_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}[5\ \ -2\ 1]^T$ los autovectores asociados correspondientes. Por lo tanto, $\sigma_1 = \lambda_1^{1/2} = 12$ y $\sigma_2 = 100^{1/2} = 10$, $\sigma_3 = 0$

y $u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{[-12\ -24\ 12]^T}{\sqrt{6}\ 12} = \frac{1}{\sqrt{6}}[-1\ \ -2\ \ -1]^T$, $u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{[0\ 10\ 20]^T}{\sqrt{5}\ 10} = \frac{1}{\sqrt{5}}[0\ 1\ 2]^T$ y u_3 cualquier vector para completar a una bon de $\mathbb{R}^3$.

Por lo tanto, como $[z]^{\mathcal{B}} = [w_1\ w_2\ w_3]^T = [\sigma_1 y_1\ \sigma_2 y_2\ \sigma_3 y_3]^T$, tenemos que

$$y_1 = \frac{w_1}{\sigma_1} = \frac{w_1}{12},\ y_2 = \frac{w_2}{\sigma_2} = \frac{w_2}{10},\ w_3 = 0.$$

Entonces,

$$z \in T(S_1) \text{ si y sólo si } \frac{w_1^2}{144} + \frac{w_2^2}{100} = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} = y_1^2 + y_2^2 \leq y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \text{ y } w_3 = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} T(S_1) &= \{z \in \mathbb{R}^3 : z = w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3,\ \frac{w_1^2}{144} + \frac{w_2^2}{100} \leq 1, w_3 = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^3 : z = w_1 u_1 + w_2 u_2,\ \frac{w_1^2}{144} + \frac{w_2^2}{100} \leq 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^3 : z = w_1 \frac{1}{\sqrt{6}}[-1\ \ -2\ \ -1]^T + w_2 \frac{1}{\sqrt{5}}[0\ 1\ 2]^T,\ \frac{w_1^2}{144} + \frac{w_2^2}{100} \leq 1\}. \end{aligned}$$

Entonces la imagen por T de la circunferencia unitaria de $\mathbb{R}^3$ es la superficie en $\mathbb{R}^3$ contenida en el plano generado por $col(A) = gen\{u_1, u_2\} = gen\{\frac{1}{\sqrt{6}}[-1\ \ -2\ \ -1]^T, \frac{1}{\sqrt{5}}[0\ 1\ 2]^T\}$. Dicha superficie contiene al origen y está limitada por la elipse centrada en el origen, cuyo eje mayor tiene longitud $2\sigma_1 = 24$, y está contenido en la recta generada por $u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}[-1\ \ -2\ \ -1]^T$ y su eje menor tiene longitud $2\sigma_2 = 20$, y está contenido en la recta generada por $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}[0\ 1\ 2]^T$. $\square$

Descomposición Polar

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (cuadrada) entonces existen matrices $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria y $|A| \in \mathbb{C}^{n\times n}$ semidefinida positiva tales que

$$A = W|A|.$$

A dicha factorización se la conoce como *descomposición polar* de A.

Veamos cómo obtener una descomposición polar de A. Sea $= U\Sigma V^*$ una DVS de A. Como $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (es decir es cuadrada), tenemos que $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarias y

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Definimos

$$|A| := V\Sigma V^* = V \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_1 \end{bmatrix} V^*,$$

entonces como

$$|A|^* = (V\Sigma V^*)^* = V\Sigma^* V^* = V\Sigma V^* = |A|$$

y los autovalores de $|A|$ son $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ (observar que definimos $|A|$ a partir de su digonalización unitaria) entonces $|A|$ es semidefinida positiva. Por otra parte, usando que $VV^* = V^*V = I_n$, tenemos que

$$A = U\Sigma V^* = UV^*V\Sigma V^* = (UV^*)|A|.$$

Tomando $W := UV^*$ tenemos que W es unitaria, pues $W^*W = (UV^*)^*(UV^*) = VU^*UV^* = VI_nV^* = I_n$ y

$$A = W|A|,$$

como queríamos ver.

Como $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ podemos calcular su determinante. Como $|A|$ es semidefinida positiva, tenemos que $\det(|A|) \geq 0$ y como W es unitaria, tenemos que $|\det(W)| = 1$. Entonces tenemos una fórmula para el módulo del determinante de A

$$|\det(A)| = |\det(W|A|)| = |\det(W)||\det(|A|)| = 1 \cdot \det(V\Sigma V^*) = \det(\Sigma) = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n.$$

Ejercicio 18: Hallar una descomposición polar para las matrices de 2×2 del **Ejercicio 10**.

Dem. Vamos a resolver el ejercicio para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$, los demás casos son similares. Siguiendo las ideas de arriba, obtengamos primero una DVS de A. Busquemos los autovalores y autovectores de

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}.$$

De hecho, $p_{A^*A}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda$. Entonces $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 0$ son los autovalores de A ordenados de mayor a menor y $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[i\ 1]^T$ y $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-i\ 1]^T$ los autovectores asociados correspondientes. Entonces, $\sigma_1 = \lambda_1^{1/2} = 2$ y $\sigma_2 = \lambda_2^{1/2} = 0$ y $V = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Para obtener U, tenemos que $u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{[2i\ -2]}{\sqrt{2}\ 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[i - 1]^T$ y $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ i]^T$, cualquier vector para completar a una bon de $\mathbb{C}^2$. Entonces $U = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, por como construímos arriba una descomposición polar de A tenemos que

$$W = UV^* = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{i-1}{2} \\ \frac{i-1}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix} = \frac{i-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

y

$$|A| = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, una descomposición polar de A es

$$A = W|A| = \left(\frac{i-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$